

Artes en el aula de matemáticas

Índice

1. Introducción	2
2. Unidad didáctica 1ª. Movimientos en el plano	3
a) Giros	3
b) Simetrías respecto al eje vertical	5
c) Traslaciones	6
3. Unidad didáctica 2ª. Figuras planas	8
a) Teorema de Tales	8
b) Triángulos	9
c) Rectángulos	10
d) polígonos regulares	10
e) Círculos y circunferencias	11
f) Sector y segmento circular.....	11
4. Unidad didáctica 3. Cuerpos geométricos	13
a) Ortoedro	13
b) Pirámides	14
c) Esferas, cilindros y conos	16
d) Poliedros	17
e) Cuerpos compuestos	18
5. Coordinación interdepartamental	19
6. Referencias bibliográficas	20

1. INTRODUCCIÓN.

Las matemáticas constituyen una materia instrumental, y por tanto están perfectamente incorporadas en diversas asignaturas, como Física, Economía, Dibujo Técnico... Sin embargo, nos resulta más difícil introducir en las clases de la asignatura de Matemáticas tanto las materias anteriores como otras, a pesar de que en el currículo de la asignatura están incluidas la transversalidad y la interacción de las matemáticas con otras materias.

Los materiales y recursos siguientes intentarán relacionar y asociar los contenidos matemáticos con los contenidos de otras asignaturas, introduciéndolos en el aula de Matemáticas, y también trabajar en coordinación y colaboración con los profesores de otros departamentos. Se ha elegido para ello el curso de 3º ESO, y el bloque de geometría para trabajar conjuntamente con las asignaturas de Música, Tecnología y Educación Plástica Visual y Audiovisual.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que estas asignaturas son optativas por lo que lo previsible será encontrarnos en una clase un alumnado que curse alguna pero no las tres asignaturas opcionales: Dibujo, Música y Tecnología.

La música, la pintura y la arquitectura son tres de las seis bellas artes que la humanidad reconoce desde la antigüedad. Estos recursos desarrollan tres Unidades Didácticas, cada una de ellas enfocada a relacionar contenidos matemáticos con cada una de las disciplinas artísticas citadas.

Los materiales presentados se podrán obtener en las URL indicadas, excepto los que son creaciones y fotografías propias. A continuación, se indica el modo de trabajar con estos recursos, que en ninguna manera son únicos, sino que se pueden sustituir o complementar con otros materiales similares, pero sirven como ejemplo de cómo utilizarlos en el aula.

2. UNIDAD DIDÁCTICA 1ª. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

“Ante todo es necesario entender que las matemáticas son un arte. La diferencia entre las matemáticas y el resto de las artes, como la música y la pintura, es que nuestra cultura no la reconoce como tal”.

(Paul Lockhart)

Esta Unidad Didáctica se hará en colaboración con el departamento de Música. En la parte matemática estudiaremos algunas partituras musicales, tanto ejemplos básicos de creación propia como partituras de grandes compositores de la historia, en las cuales se aprecian los tres movimientos que tenemos que estudiar:

- a) Giros.
- b) Simetrías
- c) Traslaciones.

a) Giros:



Figura 1.

Se trata de una línea musical simple en la que se observa que la escritura musical sería invariante ante un giro de 180°.

“The way of the world” Pieza para piano de Ignaz Moscheles. (Praga 1794-Leipzig 1870)

THE WAY OF THE WORLD

Allegro

MOSCHELES

Esta pieza es invariante con un giro de 180°. Comprobamos que se puede interpretar según está o se puede girar la partitura 180° y el resultado musical será el mismo.

Tras analizar esta característica, se debe escuchar un audio o ver un video de la obra.

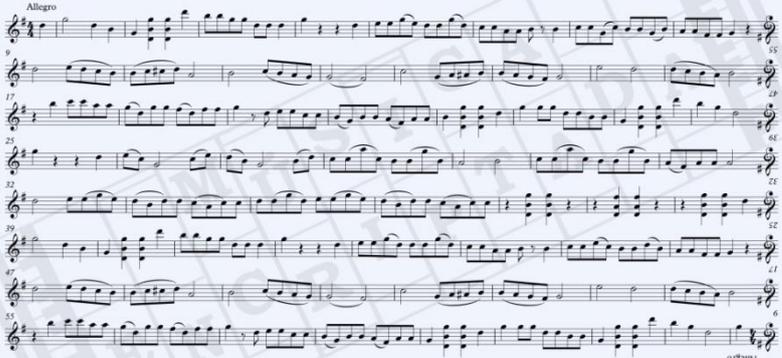
Dúo “El espejo” de W. A. Mozart (Salzburgo 1756- Viena 1791)

La siguiente pieza, con las mismas características geométricas que la anterior, es un dúo para dos violines que debe tocarse con una misma partitura y los dos violinistas enfrentados, mirando uno la partitura “al derecho” y el otro mirándola “al revés”.

Dúo del Espejo (voz 1)

El Dúo del Espejo es una composición en Sol Mayor para dos violines que se atribuye a W. A. Mozart. Tiene la particularidad que la partitura está hecha para que cada violín se coloque en un extremo del papel.

Allegro



Un intérprete comenzará por el primer compás y el otro por el último, se cruzará en el centro y cada uno acabará donde empezó el otro. Por tanto, uno la recorrerá de arriba abajo, y el otro en sentido contrario.

Dúo del Espejo (VOZ 2)

por Carlos Sax Alcazar

Figura 3. <https://musicaencriptada.es/2020/06/01/duo-del-espejo/>

La situación descrita produce un efecto curioso, con los dos músicos enfrentados y moviendo los brazos y las manos a la vez. Es conveniente y más interesante en este caso visualizar el vídeo de la interpretación y no solamente el audio.



Figura 4. Imagen diseñada por Jesús Pastor Martín

b) Simetría respecto al eje vertical

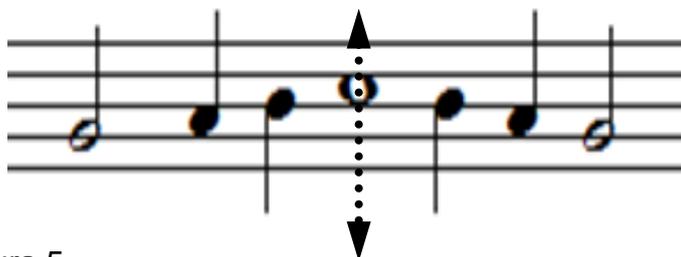


Figura 5

La línea musical es simétrica respecto al eje vertical

Sinfonía nº 47 “El palíndromo”.Josep Haydn. Rohrau1732-
Viena1809

La RAE define “palíndromo como “palabra o frase cuyas letras están dispuestas de tal manera que resulta la misma leída de izquierda a derecha que de derecha a izquierda”. Este concepto, inicialmente aplicado a las palabras, puede aplicarse a otros conceptos, como los números, siendo un palíndromo un número cacicúa o también como la estructura musical.



Figura 6. Sinfonía nº 47 “El palíndromo” de Josep Haydn. Partitura obtenida en <https://musopen.org/es/music/5434-symphony-no-47-in-g-major-hob-i47/>

En este fragmento de una sinfonía de Haydn se observa el mismo efecto. Además, el nombre de la sinfonía es el palíndromo por tener todo un movimiento (el 3º) compuesto de frases musicales que cada una de ellas es un palíndromo.

También sería conveniente escuchar el 3er movimiento de esta sinfonía y analizar toda la partitura.

Otro ejemplo, tan interesante como curioso para estudiar la simetría, es el Canon del Cangrejo, de J. S. Bach, que se puede ver en la siguiente partitura



Figura 7. Partitura obtenida en <https://carlosgarciamacias.wordpress.com/2012/06/02/el-reto-de-federico-el-grande-a-johann-sebastian-bach-origen-de-la-ofrenda-musical-parte-2-el-canon-cangrejo/>

Después de estudiar la simetría de la partitura, es conveniente ver la recreación del canon que aparece en el siguiente vídeo. <https://www.youtube.com/watch?v=36ykl2tJwZM>

c) *Traslación*



Figura 8

Estas son las notas del canon "Frère Jacques", con los vectores que marcan la traslación de la música.

Como otro ejemplo de una traslación tendríamos el famoso canon de Pachelbel, Nuremberg 1653- Nuremberg 1703. aunque nos valdría cualquier canon a dos tres o cuatro voces, incluso las fugas de J. S. Bach también podrían ser buenos ejemplos para trabajar en esta sección, creo conveniente elegir el canon de Pachelbel por ser probablemente conocido por la mayoría de los alumnos.



Figura 9. https://es.wikipedia.org/wiki/Canon_en_re_mayor_de_Pachelbel

Como el resto de las obras, es conveniente escuchar una versión del canon, a ser posible con vídeo.

A partir de estos ejemplos u otros con propiedades similares, estudiamos los tres tipos de movimientos con todas las características de cada uno de ellos.

Las últimas sesiones las utilizaremos para la creación, por parte de cada alumno, de frases musicales que cumplan los diferentes movimientos.

Simultáneamente, en clase de música, se crean composiciones o se repasan y corrigen las composiciones creadas en la clase de matemáticas, a una o más voces para los instrumentos de los que dispone el centro. En estas clases se trabaja tanto la composición como la ejecución de la música que tenga las propiedades matemáticas indicadas anteriormente.

3. UNIDAD DIDÁCTICA 2ª. FIGURAS PLANAS

“Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de otros artistas, es porque están hechos de ideas”.

G.H. Hardy

Esta Unidad Didáctica se hará en colaboración con el departamento de Educación Plástica y Visual. En la parte matemática analizaremos cuadros, principalmente de la época de la abstracción geométrica, cuadros en los que aparecen todas las figuras planas que queremos estudiar, tanto los distintos polígonos como las figuras curvas, y analizaremos sus propiedades, perímetro, superficie, ángulos, etc.

Trabajaremos la proporcionalidad, circunferencias, triángulos y polígonos en general a partir de cuadros de la etapa de la abstracción geométrica, que se localiza en la primera mitad del siglo XX.

a) Teorema de Tales

Para el teorema de Tales podemos apoyarnos en un óleo sobre aglomerado de Manuel Espinosa titulado “Pintura”, realizado en 1945. Eliminando los datos “superfluos” para nuestro estudio, que serían los colores y alguna de las líneas del cuadro, nos quedarían tres líneas paralelas y cuatro oblicuas a ellas con las que poder presentar y empezar a practicar con el teorema de Tales, y a partir de éste, estudiar también la proporcionalidad.



Figura 10. a)

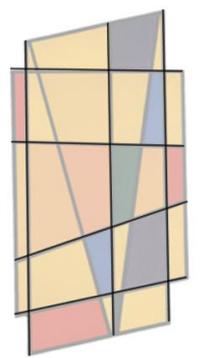


Figura 9 b)

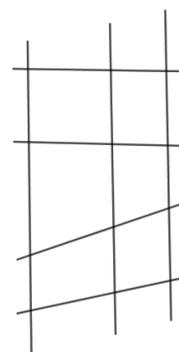
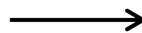


Figura 9 c)

Figura 10. <https://www.march.es/arte/madrid/exposiciones/america/los-artistas.aspx>

Otro ejemplo apropiado estaría en la obra “Cuadrados de un triángulo 3-4-5 en perspectiva escalena”, creación de Crockett Johnson en 1965, que además representa la demostración del teorema de Pitágoras con lados de

longitudes 3, 4 y 5 unidades. También en este cuadro podemos hacer un esquema destacando las líneas que nos interesan y suprimiendo el resto.



Figura 11 a)



Figura 11 b)

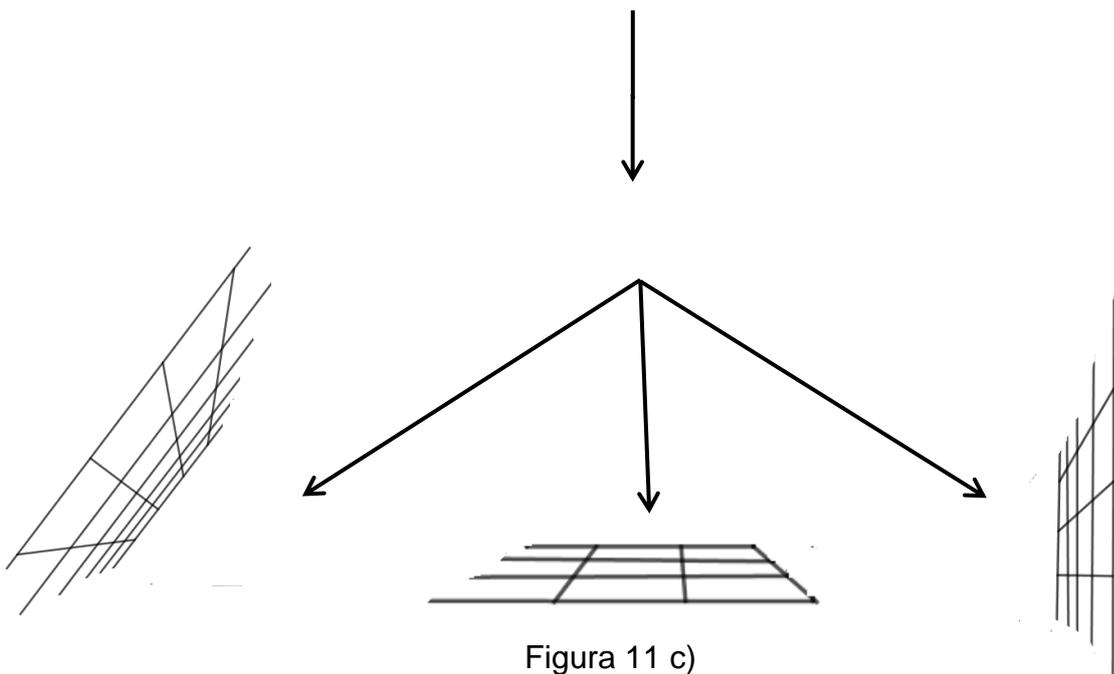


Figura 11 c)

Figura 11 a). <http://www.laboratorium.eus/es/aggregator/sources/2?page=28#!forum/sci.crypt>

Cualquiera de los tres lados nos serviría para representar el teorema de Tales y trabajar sobre él.

b) Triángulos

Para estudiar los distintos tipos de triángulos que existen, tanto según sus lados como según sus ángulos, nos puede servir de buena ayuda la composición que Nassos Daphnis realizó en 1972, titulada "S-8-72"



Figura 12 a)

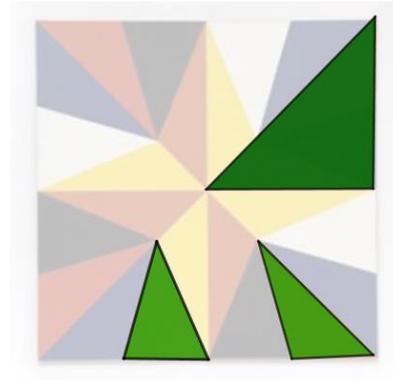


Figura 12 b)

Figura 12. <https://www.wikiart.org/es/nassos-daphnis/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry>

c) Rectángulos.

A continuación de los triángulos se verán los rectángulos, para ello es una buena elección alguna obra de Piet Mondrian, como por ejemplo el cuadro titulado “Composición A” obra que Piet Mondrian realizó en 1923, en la que se presentan diversos rectángulos de tamaños y proporciones variadas.

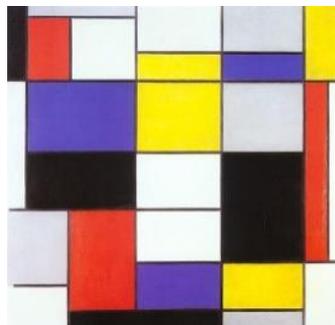


Figura 13. <https://www.wikiart.org/es/piet-mondrian/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry>

d) Polígonos regulares.

Quando veamos los polígonos regulares, podemos partir de un cuadro de la colección “Quince variaciones sobre un mismo tema”, que forma parte de un conjunto de composiciones que Max Bill realizó en 1938. En este caso se muestra la transformación de un triángulo equilátero, manteniendo la longitud de los lados, evoluciona según se van abriendo sus ángulos hacia un octógono, creando una espiral.



Figura 14. <https://graffica.info/max-bill-obras-de-arte-multiplicadas-como-originales/>

e) Círculos y circunferencias.

Para estudiar las figuras curvas, la obra de Robert Delaunay es apropiada, en este caso elegimos “Rythm”, realizada en 1938, en esta pintura aparecen circunferencias de cualquier tipo y casi cualquier elemento que queramos estudiar de un círculo o de una circunferencia.



Figura 15 a)



Figura 15 b)

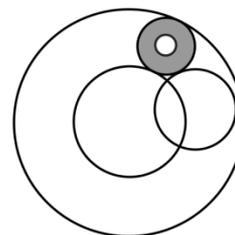


Figura 15 c)

Figura 15. <https://www.wikiart.org/es/robert-delaunay>

Reduciendo el cuadro a estas cinco circunferencias, tenemos circunferencias concéntricas, interiores, exteriores, tangentes interiores, tangentes exteriores y secantes. También podemos obtener coronas circulares de la imagen.

f) Sector y segmento circular.

Finalmente, a modo de repaso sobre las figuras planas, podemos presentar el último cuadro, “Soft Hard”, del pintor Vasili Kandinsky. Además en este cuadro aparecen unos conceptos nuevos, que no habíamos comentado en cuadros anteriores, el sector circular, segmento circular y cuerda,



Figura 16 a) [https://www.meisterdrucke.es/impresion-art%C3%ADstica/Wassily-Kandinsky/39363/Soft-Hard-\(Soft-Hard\)-1927.html](https://www.meisterdrucke.es/impresion-art%C3%ADstica/Wassily-Kandinsky/39363/Soft-Hard-(Soft-Hard)-1927.html)

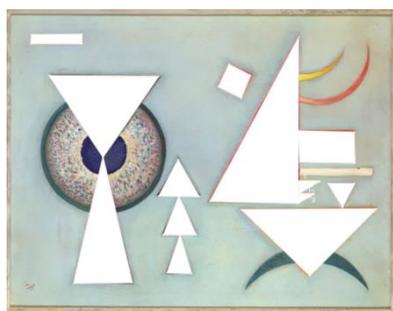


Figura 16 b)

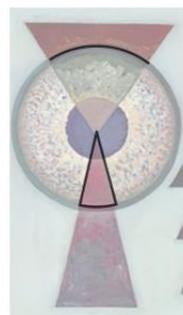
Cuadro suprimiendo los polígonos

En la imagen siguiente, extraída del cuadro anterior, vemos un sector circular y un segmento circular con los que podemos iniciar la explicación sobre estos conceptos.



Figura 16 c)

Polígonos suprimidos del cuadro



Cada alumno hará un trabajo en un archivo de *geogebra* que consistirá en la “creación” de un cuadro de abstracción geométrica, en dicho cuadro tendrán que aparecer algunos de los aspectos geométricos estudiados en la Unidad.

En la clase de Educación Plástica Visual y Audiovisual se realizarán láminas en las que se imitará el estilo pictórico estudiado de la abstracción geométrica y como trabajo final se realizará el mismo cuadro que se ha hecho en *geogebra*, con las mismas figuras y colores. El material empleado para estos cuadros será el que considere más conveniente el profesorado que imparta la asignatura (acuarelas, témpera, ceras...).

Los cuadros elegidos son un ejemplo entre la inmensidad de cuadros aptos para ello que podríamos tomar para analizar cada figura plana que queremos estudiar.

4. UNIDAD DIDÁCTICA 3ª. CUERPOS GEOMÉTRICOS

"No intentes convencer a un niño de que las matemáticas están presentes en su vida, muéstrale la vida y que él descubra las matemáticas"

Francisco Martínez

(<https://huelvabuenasnoticias.com/2020/01/24/la-mejor-forma-de-aprender-es-ensenando-y-hoy-toda-la-humanidad-conmemora-este-hecho/>)

Esta Unidad Didáctica la realizaremos en coordinación con el Departamento de Tecnología. Comenzaremos la parte matemática dando a conocer estructuras arquitectónicas, intentando tomar ejemplos que sean relativamente conocidos, en los que aparecen los cuerpos geométricos que queremos estudiar, es decir, los poliedros más característicos y los conos, cilindros y esferas. Insistiremos en las dimensiones reales de estas estructuras y realizaremos maquetas a escala de algunas de ellas, haciendo primero el desarrollo plano de ellas y aprovechando éste para calcular la superficie y volumen de los cuerpos.

Estudiaremos el volumen en todas las figuras que aparecen en el currículo de 3º ESO, mostrando diversos ejemplos de obras arquitectónicas, en algunos casos de monumentos conocidos, en otros de estructuras anónimas. Analizaremos cada construcción, estudiaremos los cuerpos que aparecen en ella, calcularemos área y volumen y de algunos construiremos en cartulina una maqueta a escala.

a) Ortoedro

Estudiamos el ortoedro y los prismas rectos a partir de torres de castillos o rascacielos que tengan caras especialmente paralelas y sin mucho adorno para centrarnos en el problema que nos ocupa. En la figura siguiente podemos analizar qué es un ortoedro y las condiciones que debe cumplir un poliedro para ser ortoedro. Se trata de un rascacielos de San Francisco (EEUU).



Figura 17 a)



Figura 17 b)

https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Edificios_m%C3%A1s_altos_de_San_Francisco

La siguiente construcción, la torre de una fortaleza, nos servirá para identificar un prisma de base cuadrada y comentar la cantidad de veces que hemos visto este cuerpo geométrico en distintas y muy variadas construcciones. Veremos en este momento los prismas cuyas bases sean polígonos regulares de diferente número de lados. Se trata del Castillo de la Peña de Ayllón, en Uncastillo (Zaragoza)



Figura 18 a)

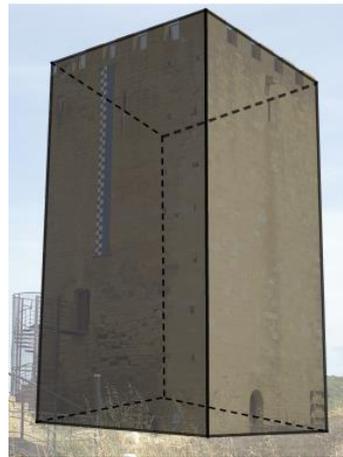


Figura 18 b)

https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Torre_del_Castillo_de_la_Pe%C3%B1a_Ayll%C3%B3n.JPG

b) Pirámides

En este apartado presentaremos la conocida gran pirámide de Guiza y alguna otra pirámide de distintas épocas, aunque posiblemente menos conocidas. Compararemos sus dimensiones y también las proporciones para valorar si se pueden considerar pirámides semejantes o no según la razón entre la longitud del lado de la pirámide y la altura.



Figura 19 a)

Gran pirámide de Guiza



Figura 19 b)

Pirámide de Kukulcán



Figura 19 c)

Pirámide del Louvre



Figura 19 d)

Pirámide Cestia

Figura 19 a)

https://es.wikipedia.org/wiki/Gran_Pir%C3%A1mide_de_Guiza

Figura 19 b)

[https://www.wikiwand.com/es/Pir%C3%A1mide_\(arquitectura\)](https://www.wikiwand.com/es/Pir%C3%A1mide_(arquitectura))

Figura 19 c)

<https://lopezdoriga.com/vida-y-estilo/ha-muerto-ieoh-ming-pei-arquitecto-que-diseno-la-piramide-del-louvre/>

Figura 19 d)

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Piramide_Cestia.jpg

Haremos un dibujo de planta y alzado de las cuatro pirámides que estamos presentando, tras buscar en internet las dimensiones de cada una. El resultado lo tenemos en la figura siguiente, donde se comprueban las enormes dimensiones que tiene la pirámide de Guiza, en comparación con el resto de ellas, también podemos comprobar que ésta y la pirámide que hay a la entrada del museo del Louvre son casi semejantes, con una proporción entre lado y altura que curiosamente se aproxima mucho en ambos casos al número áureo Φ ($\Phi \approx 1.618$).

La pirámide Cestia de Roma, por contraposición, tiene unas proporciones muy distintas, con una altura incluso superior al lado de la pirámide.

Por otra parte, podemos aprovechar la pirámide de Kukulcán para introducir el concepto de pirámides truncadas y generalizarlo al truncamiento de cualquier cuerpo geométrico.

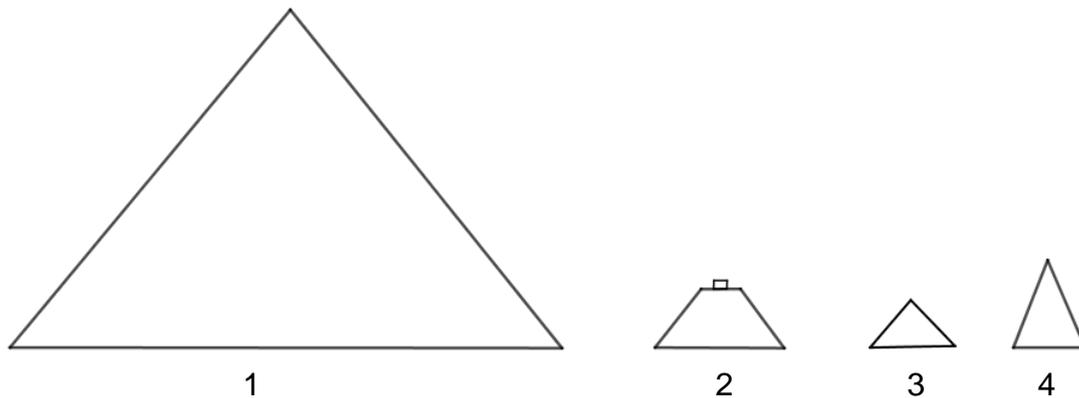


Figura 120

- 1 Gran pirámide de Guiza.
- 2 Pirámide de Kukulcán.
- 3 Pirámide del Louvre.
- 4 Pirámide Cestia.

c) Esferas, cilindros y conos.

Para conocer las esferas y cilindros podemos comenzar viendo el Atomium de Bruselas, debemos buscar tanto sus dimensiones como el motivo de su construcción y su finalidad actual. Calcularemos el volumen y superficie de cada esfera que compone esta estructura.



Figura 21. Imagen obtenida de Google maps

Una construcción con forma cónica la encontramos en la ciudad de las artes en Valencia. Sus dimensiones son mucho más discretas que cualquiera de las analizadas anteriormente, pero representa perfectamente en una construcción el cilindro que queremos conocer.



Imagen 22. Imagen obtenida de Google maps

d) Poliedros.

Para introducir los poliedros y cuerpos curvos oblicuos, tenemos un buen ejemplo en la Plaza de Castilla de Madrid, las torres Kio. Como una de las primeras preguntas que nos vienen a la cabeza cuando las vemos es ¿Por qué no se caen?, podemos analizar el motivo de ello.



Figura 23. Imagen obtenida de Google maps

Pensando en figuras oblicuas, es posible que nos acordemos de la Torre de Pisa, torre campanario de la catedral de esta ciudad, como una construcción de este grupo. Si observamos bien esta torre, aunque lo pudiera parecer, no es oblicua sino una torre de forma cilíndrica que empezó a inclinarse en cuanto comenzaron con su construcción, en 1173 y en la actualidad tiene una inclinación de 4° .

Si fuera una torre oblicua tendría el círculo superior paralelo al suelo y no sería perpendicular a la generatriz, cosa que no se cumple, como podemos observar en la fotografía.



Figura 24. https://es.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Pisa

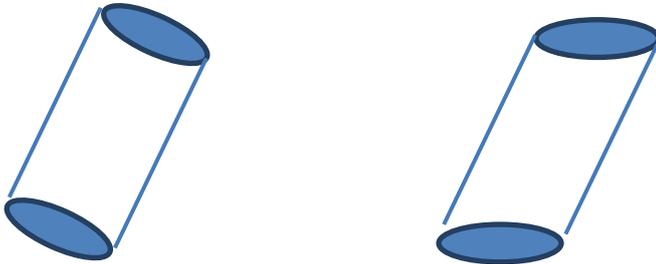


Figura 25

Cilindro recto pero inclinado

cilindro oblicuo

e) Cuerpos compuestos.

Para finalizar esta sección, traemos la estructura de **prisma de base cuadrada con tejado piramidal** y equivalente a éste, el cilindro con un cono por encima. En el primer caso la imagen es de un pináculo de la Fábrica de Moneda de Segovia, el segundo caso es un granero que podemos encontrar casi en cualquier punto de la geografía española.



Las últimas clases en las que trabajaremos esta Unidad Didáctica consistirán en la siguiente actividad: cada alumno deberá buscar una construcción en internet con alguna de las formas estudiadas, diseñar un desarrollo plano de ella a escala y construir la maqueta. Por ello es importante que podamos conocer las dimensiones reales de las construcciones elegidas.

- En la clase de tecnología se realizará la misma construcción que hemos elegido en la clase de Matemáticas, a una escala que sea conveniente, con los materiales que el profesorado de Tecnología crea conveniente (madera, metal o incluso con impresora 3D si el instituto dispusiera de ella y fuera posible su utilización).

Al igual que en las Unidades anteriores, las obras indicadas son orientativas entre la inmensidad de construcciones que podemos encontrar en la calle de cada uno de los cuerpos geométricos que se deben estudiar.

Sería también conveniente realizar una serie de actividades para exponer ante el resto de los alumnos del centro, estas actividades serían.

ACTIVIDADES		
1º	Exposición	Cuadros realizados para el estudio de la geometría plana.
2º	Exposición	Maquetas a escala realizadas para el estudio del volumen.
3º	Concierto	Con las composiciones realizadas por los alumnos, preparando esta audición durante las clases de música.

5. COORDINACIÓN INTERDEPARTAMENTAL

Para utilizar convenientemente estos recursos, es imprescindible una perfecta coordinación del departamento de Matemáticas con los tres departamentos implicados en el proyecto.

Como primera medida tendríamos que intentar que los tiempos estuvieran coordinados, es decir, comenzar cada Unidad Didáctica aproximadamente a la vez el departamento de Matemáticas con el departamento que corresponda en cada caso, y terminar también en un tiempo aproximado.

La segunda medida será no duplicar demasiada información, esta medida puede ser a veces difícil de cumplir pues estamos tratando un mismo tema en dos clases distintas. Sería conveniente que en la clase de Matemáticas priorizáramos sobre los aspectos geométricos, formas, volúmenes de las diversas figuras mientras que en:

- Música se analizara más la armonía, la melodía, la historia de la música, ejecución de la partitura...

- Educación Plástica Visual y Audiovisual se estudiara el movimiento pictórico de la abstracción geométrica, se analizaran los colores y los equilibrios del cuadro para aplicarlo correctamente en la realización de las láminas...

- Tecnología la finalidad y uso de las construcciones, el estudio de los diversos materiales, la construcción a escala de los distintos edificios arquitectónicos estudiados...

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dominguez Pedro "Vanguardias artísticas del siglo XX"
<https://vanguardiaartisticasigloxx.wordpress.com/2015/08/07/abstraccion-geometrica/>

Mañés Pilar "Max Bill: obras de arte multiplicadas como originales"
<https://graffica.info/max-bill-obras-de-arte-multiplicadas-como-originales/>

<https://es.wikipedia.org>

<https://www.wikiart.org>